Livret de Mathématiques

2^{nde} –> $1^{ère}$ Spécialité maths

Ce livret s'adresse aux élèves qui s'apprêtent à entrer en classe de première Spécialité maths au lycée Notre Dame les Oiseaux. Il comporte des fiches d'exercices proposées par l'académie de Versailles (https://euler.ac-versailles.fr/IMG/pdf/livret_liaison_maths_2de_1spe_2020.pdf), et des compléments sur certaines parties du programme de 2^{nde}.

Quelques conseils d'organisation :

- S'assurer que l'on maitrise le point de cours travaillé avant d'effectuer les exercices en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet abordé.

- Faire attention au soin et à la rédaction.

- Si vous ne réussissez pas à faire un exercice, n'abandonnez pas et allez ouvrir vos cahiers de 2^{nde} pour y retrouver un exercice du même type.

- C'est en bloquant, en se trompant, en se rendant compte de ses erreurs et en les corrigeant que l'on progresse en mathématiques.

L'équipe enseignante

Factorisation, développement

Exercice 1 **

Pour tout x réel, factoriser les expressions suivantes. Pensez à factoriser plusieurs fois si nécessaire et à utiliser les identités remarquables :

$A=12x^3-3x$ $\qquad B=x^2-4+(x+2)(x+3)$

$C=(3x-2)(x+5)+9x^2-4$ $\qquad D=9x^2-1+(3x+1)(2x+3)$

$E=\dfrac{25}{4}x^2-\dfrac{169}{144}$ $\qquad F=\dfrac{81}{16}x^2-\dfrac{33}{2}x+\dfrac{121}{9}$

$G=x^2+6x+9-(x+3)(x-2)$

Point méthode

Pour factoriser, on peut chercher à reconnaître :

- Un facteur commun
- Une IR par exple a^2-b^2

Exercice 2 *

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-3x+2$

Exprimer $f(-1+\sqrt{2})$ sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b entiers.

2. a. En remarquant que $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$,

montrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

b. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x^3+2x^2+x+1$

Montrer que pour tout réel h $f(1+h)=-4h^3-10h^2-7h$

Point méthode

Pour montrer une égalité du type $A=B$, on peut :

- Transformer l'écriture de A (développer, réduire au même dénominateur) pour obtenir B
- Transformer l'écriture de B pour obtenir A
- Transformer l'écriture de A pour obtenir C ; Transformer l'écriture de B pour obtenir C et conclure

Exercice 3 **

Calculer sans calculatrice et simplifier les expressions suivantes :

$A=\dfrac{a^2+ab}{b^2+ab}$ avec $b^2+ab\neq 0$ $\qquad B=\dfrac{\dfrac{1}{1-\pi}-\dfrac{1}{1+\pi}}{1+\dfrac{1}{\pi^2-1}}$

Exercice 4 **

1) Montrer que pour tout $x \neq -5$ et tout $x \neq -9$, $\dfrac{3}{5+x} - \dfrac{4}{9+x} = \dfrac{7-x}{(5+x)(9+x)}$

2) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{2x+1}{x^2} - \dfrac{4x-5}{x} + 1 = \dfrac{-3x^2+7x+1}{x^2}$

3) Soit f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right)$

   Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

4) *** Soit f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,2\}$ par $f(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$

   Montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,0\,;\,1\}$ $\dfrac{f\left(\dfrac{2}{a}\right)}{a} = \dfrac{a}{(a-1)(a+1)}$

NOTRE-DAME "Les Oiseaux"

Equations, inéquations

Exercice 1 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(5x-1)(x-9)-(x-9)(2x-1)=0$

$(4x+3)^2=(5x-1)^2$ $\qquad$ $(6x-3)^2-(2x-1)=0$

$x+1=\dfrac{9}{x+1}$ $\qquad$ $\dfrac{3x-1}{x-5}=\dfrac{3x-4}{x}$

$\dfrac{16x^2-25}{2x-3}=\dfrac{4x-5}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2-3x}{(x-3)}=4$

Point méthode

Pour résoudre une équation polynomiale :

- On transpose tout dans un même membre pour se ramener à $A=0$
- On factorise A
- On conclut en utilisant la propriété d'un produit $BC=0$ ssi $B=0$ ou $C=0$

Point méthode

Pour résoudre une équation quotient :

- On cherche les valeurs interdites VI et on résout dans $E=\mathbb{R}\backslash\{VI\}$
- On transpose tout dans un même membre pour se ramener à $\dfrac{A}{B}=0$ ssi $A=0$ et $B\neq 0$ ($A=0$ et $x\neq VI$)
- On résout $A=0$ dans $E=\mathbb{R}\backslash\{VI\}$

Exercice 2 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(-5x-4)(7-3x)\leq 0$

$(2x-3)^2>(3x-7)^2$

$(3x+2)^2-(3x+2)(5x+1)\leq 0$

$\dfrac{-5x-2}{-13x+7}\geq 0$ $\qquad$ $\dfrac{x^2-16}{9-4x^2}\geq 0$

$\dfrac{3}{2x-1}\geq\dfrac{2}{-3x+15}$ $\qquad$ $\dfrac{2x+3}{x+1}\leq\dfrac{x+1}{2x+3}$

$\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x-2}\geq 3$

$\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}\geq\dfrac{5}{(x+1)(x-1)}$

Signe de $ax+b$ ($a\neq 0$)

Si a > 0 (f croissante)

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si a < 0 (f décroissante)

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Point méthode

Pour résoudre une inéquation :

- On cherche éventuellement les valeurs interdites VI et on résout dans $E=\mathbb{R}\backslash\{VI\}$
- On transpose tout dans un même membre pour se ramener à $AB>0$ ou $\dfrac{A}{B}>0$
- On factorise éventuellement A (facteur commun, IR a^2-b^2)
- On étudie le signe de chacun des facteurs A et B et on conclut dans un tableau de signes

Fonctions

Exercice 1 **

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-4)^2 - 4$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

1) Pour tout réel x, développer $f(x)$
2) Pour tout réel x, factoriser $f(x)$
3) on dispose de trois écritures de l'expression $f(x)$: la forme de départ, la forme développée et la forme factorisée

Répondre à chacune des questions en précisant la forme la plus adaptée

a) Déterminer l'image de 2 par la fonction f
b) Déterminer les antécédents de 12 par la fonction f
c) Déterminer l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées
d) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses
e) Résoudre l'équation $f(x) = -4$
f) Calculer $f(3)$

Exercice 2 **

m est le minimum (M est le maximum) d'une fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ signifie :

- il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$ ($f(a) = M$)
- pour tout réel $x \in I$, $f(x) \geq m$ ($f(x) \leq M$)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 16x + 14$

1) Montrer que $f(x) = 2(x+4)^2 - 18$. (Cette forme s'appelle forme canonique de $f(x)$)
2) En déduire que f admet un minimum -18 atteint pour $x = -4$
3) Factoriser $f(x)$ à l'aide d'une identité remarquable
4) Résoudre les équations suivantes, en utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée :

$$f(x) = 0 \qquad\qquad f(x) = 14 \qquad\qquad f(x) = -20$$

5) Interpréter graphiquement les solutions de $f(x) = 0$

Exercice 3 *

Une fonction f est croissante (décroissante) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:
Pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 11$

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = -2(x-1)^2 + 13$
2) Soient a et b de $\left]-\infty\ ;\ 1\right]$ avec $a \leq b \leq 1$.

   Montrer que $f(a) \leq f(b)$. Que peut-on en déduire ?

3) Montrer de même que f est décroissante sur $\left[1\ ;\ +\infty\right[$

Exercice 4 **

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$

1) Quel est son domaine de définition ?
2) Etudier la parité de la fonction f sur son domaine de définition.
3) Soit a et b deux réels.

a) Montrer que $f(a) - f(b) = \dfrac{3(b+a)(b-a)}{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}$

b) Etudier le signe de $f(a) - f(b)$ pour a et b appartenant à $[0\,;+\infty[$ avec $a<b$; en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.

c) Même consigne sur $]-\infty\,;0]$

4) Dresser le tableau de variations de f

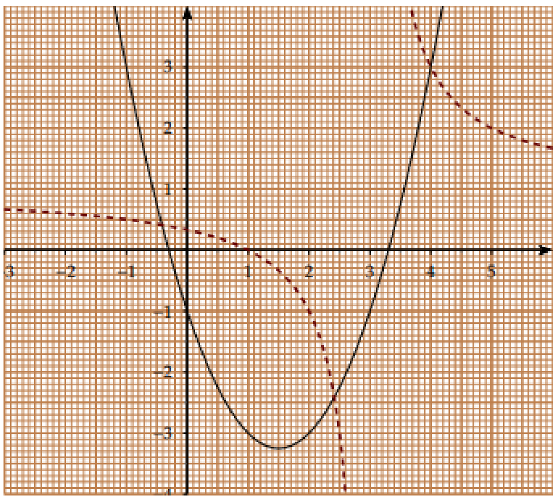
Exercice 5 **

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Démontrer que, dans cet ensemble, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-3}$
3) Déterminer les variations de f sur $]3; +\infty[$

Exercice 6 **

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$ et $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x-3}$ dont on note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ les représentations graphiques. On donne ci-contre les représentations graphiques de f et g.



1) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

$f(x) = 2$ $\qquad\qquad$ $f(x) = g(x)$

2) Résolutions algébriques :
   a) Déterminer les antécédents éventuels de -1 par f et de 1 par g.
   b) Montrer que pour tout réel x, $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

c) Montrer que $M(x\,;y) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{H}$ si et seulement si

$$\frac{(x-4)\left(x^2-2x-1\right)}{x-3}=0$$

En déduire les abscisses des points de $\mathscr{P} \cap \mathscr{H}$

d) Etudier le signe de $d(x)=f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

En déduire les positions relatives de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{H}$

Point méthode

Pour étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant deux fonctions f et g :

- On étudie le signe de $d(x)=f(x)-g(x)$
- On conclut :

  Si $d(x)>0$, soit si $f(x)>g(x)$ alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus strictement de $\mathscr{C}_g$

  Si $d(x)<0$, soit si $f(x)<g(x)$ alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous strictement de $\mathscr{C}_g$

Droites du plan et systèmes de deux équations à deux inconnues

Exercice 1 *

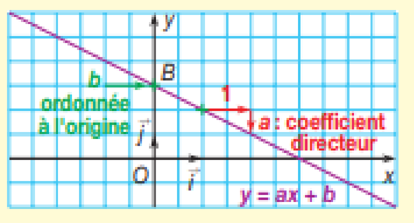
Déterminer l'équation réduite de chaque droite tracée sur le graphique ci-dessous

Toute droite sécante avec l'axe (Oy) a pour équation (réduite)

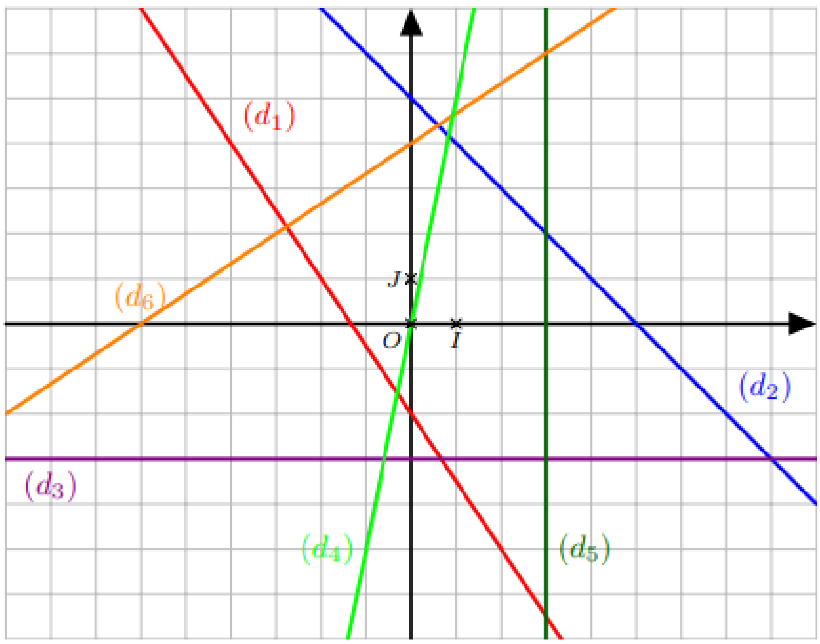
$\boldsymbol{y = ax + b}$

a est le coefficient directeur

b est l'ordonnée à l'origine



Toute droite parallèle à l'axe (Oy) a pour équation (réduite)



Point méthode

Pour déterminer une équation réduite de droite (d) on peut :

- Lire graphiquement a et b (lorsqu'ils sont entiers)
- Calculer a avec la formule $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; puis calculer b en exprimant par exple que $A(x_A\,;\,y_A) \in (d)$ ssi $y_A = ax_A + b$ soit ssi $b = y_A - ax_A$

Exercice 2 *

On commence toujours par vérifier que le système admet bien une solution unique, en calculant son déterminant

Résoudre les systèmes suivants par substitution :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x + 5y = 19 \end{cases}$$

Point méthode

Pour résoudre un système par substitution :

- On exprime x en fonction de y (ou inversement) à l'aide d'une des deux équations
- Puis, on remplace (on substitue) x par son expression en fonction de y dans l'autre équation

Résoudre les systèmes suivants par combinaison :

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 7y = 11 \\ -5x + 13y = -17 \end{cases}$$

Point méthode

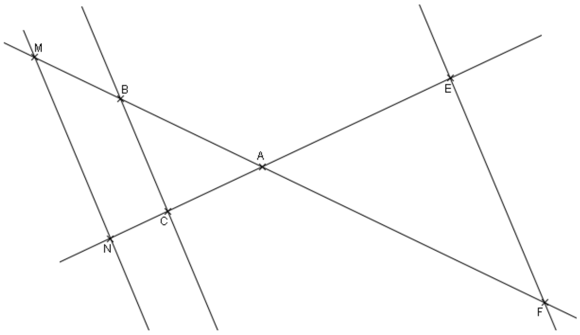
Pour résoudre un système par combinaison :

- On se ramène à une équation du 1er degré en combinant les deux équations de telle sorte qu'on élimine l'une des deux inconnues

Problèmes de géométrie

Exercice 1 *

La figure ci-contre n'est pas réalisée en vraie grandeur. Elle n'est pas à reproduire.



Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

On donne : AB = 4,5 cm; AC = 3 cm; AN = 4,8 cm et MN = 6,4 cm.

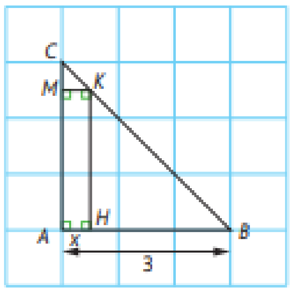
1) Calculer AM et BC.
2) On sait de plus que AE = 5 cm et AF = 7,5 cm. Montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2 *

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que BC = 8cm et AC = 6cm.

Calculer la distance du point A à la droite (BC)

Exercice 3 **



ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = 3cm$.

H est un point de $[AB]$ tel que $AH = x$

AHKM est un rectangle.

1) À quel intervalle I doit appartenir x? Justifier.
2) Prouver que l'aire du trapèze rectangle AHKC est $f(x) = 3x - 0,5x^2$
3) a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{9 - (3 - x)^2}{2}$

   b) En déduire que f admet un maximum atteint pour $x = 3$
4) Résoudre dans I $f(x) > 3$